الأربعاء 16 / 5 / 2018 معادلات فيزيائية المحاضرة العاشرة ٢٠١٥.

معادلة لابلاس بالإحداثيات الكروية : ص 416 فلما نعرف الآتي على -

1) حل معادلة لابلاس في حالة $u = u(r, \theta)$ لابلاغ:

حل ~ ~ داخل كرة نصف قطرها R هو

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cdot P_n(\cos\theta)$$

وحل معادلة لابلاس خارج الكرة هو،

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} \cdot P_n(\cos\theta)$$

علماً أن B_n, A_n ثوابت تعين الشروط المعطاة

وأيضاً:

$P_0(\cos\theta) = 1$, $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

$P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$, $P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

تطبيق : ص 421

أوجد حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية $\Delta u = 0$

في الإحداثيات الكروية حالة $u = u(r,\theta)$

داخل كرة نصف قطرها R , المحقق للشرط الحدي $u|_{r=R} = \cos\theta \quad \ldots (1)$

الحل :

الحل يعطى بالدستور الآتي :

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

A_n ثابت اختياري ;

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta)$$

$$\cos\theta = A_0 P_0(\cos\theta) + A_1 R P_1(\cos\theta) + \ldots = A_0 + A_1 R \cos\theta + \ldots$$

بالمطابقة

$$A_0 = 0 \ , \ A_1 R = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{R}$$

وبقية الثوابت معدومة

$$u(r,\theta) = A_1 r . P_1(\cos\theta) = \frac{r}{R}\cos\theta$$

مثال (2) : ص 422

أوجد حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية (حالة $u = u(r,\theta)$)

داخل كرة نصف قطرها R , المحقق للشرط الحدي التالي :

$$u - u_r \Big|_{r=R} = \sin^2\theta \quad \ldots (1)$$

الحل :

الحل يعطى بالدستور الآتي :

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \quad \ldots (2)$$

نشتق العلاقة (2) بالنسبة لـ r ⇐

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n r^{n-1} P_n(\cos\theta)$$

$$u - u_r = A_0 P_0(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} [r^n - n r^{n-1}] A_n P_n(\cos\theta) \quad \ldots (3)$$

وبالاعتماد على الشرط ٢ نحصل على

$$1-\cos^2\theta = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[R^n - nR^{n-1}] \cdot A_n P_n(\cos\theta)$$

$$= A_0 + (R-1)A_1 \cdot \cos\theta + (R^2-2R)A_2 \cdot \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right) + \cdots$$

$$1-\cos^2\theta = A_0 + (R-1)A_1 \cos\theta + (R^2-2R) \cdot A_2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + \cdots$$

بالمطابقة :

$$A_0 - \frac{R^2-2R}{2} A_2 = 1 \quad , \quad A_1 = 0$$

$$\frac{3}{2}(R^2-2R)A_2 = -1 \Rightarrow A_2 = \frac{-2}{3(R^2-2R)}$$

$$A_0 = \frac{R^2-2R}{2}\left(\frac{-2}{3(R^2-2R)}\right) + 1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} = A_0$$

وبقية الثوابت معدومة .

نبدل بالعلاقة (2) $(n=0,2)$ نحصل على :

$$u(r,\theta) = A_0 + A_2 r^2 \cdot \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{2r^2}{3R^2-2R} \cdot \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

$$= \frac{2}{3} \quad \frac{r^2}{3(R^2-2R)} \, 3(\cos^2\theta - 1)$$

ملاحظة : تمرين صفحة 423

اذا أعطيت الشروط الحدية على حدود الكرة من أجل $R_1 < r < R_2$ وكانت هذه الشروط متعلقة بـ θ فقط عندئذ حل المسألة المطروحة بحالة الاحداثيات الكروية

$$u = u(r,\theta) \quad , \quad u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta)$$

تطبيق صفحة 423 دورة

اوجد حل معادلة لابلاس في الاحداثيات الكروية (حالة $u = u(r,\theta)$) علماً أنه $1 < r < 2$ والمحقق للشروط الحدية التالية :

$$u\big|_{r=1} = \cos^2\theta \quad , \quad u\big|_{r=2} = \frac{1}{8}(\cos^2\theta + 1) \quad \text{---} (1)$$

الحل :

الحل يعطى بالدستور الآتي

$$(2) \text{---} \; u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta)$$

من العلاقة (2) والشرط الأول نحصل على :

$$\cos^2\theta = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n + B_n] \cdot P_n(\cos\theta)$$

عندما تظهر $\cos^2\theta$ نتوقف عن الحدود

$$= (A_0 + B_0) + (A_1 + B_1) \cdot \cos\theta + (A_2 + B_2)\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} + \cdots$$

بالمطابقة نجد أن :

$$\left.\begin{aligned} A_0 + B_0 - \frac{1}{2}(A_2 + B_2) &= 0 \\ (A_1 + B_1) &= 0 \\ \frac{3}{2}(A_2 + B_2) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_0 + B_0 &= \frac{1}{3} \quad \text{---} \; ① \\ A_1 + B_1 &= 0 \quad \text{---} \; ② \\ A_2 + B_2 &= \frac{2}{3} \quad \text{---} \; ③ \end{aligned}$$

...اداً على العلاقة (2) والشرط الثاني من الشروط الحدية نحصل على :

$$\frac{1}{8}\cos^2\theta + \frac{1}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n \cdot 2^n + B_n 2^{-(n+1)}\right] P_n(\cos\theta)$$

بعد من ابعاد الحدود عندما تظهر $\cos^2\theta$

$$= A_0 + \frac{B_0}{2} + \left(2A_1 + \frac{B_1}{4}\right)\cos\theta + \left(4A_2 + \frac{B_2}{8}\right)\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)$$

بالمطابقة نحصل على :

$$\left(A_0 + \frac{1}{2}B_0\right) - \frac{1}{2}\left(4A_2 + \frac{1}{8}B_2\right) = \frac{1}{8}$$

$$2A_1 + \frac{B_1}{4} = 0$$

$$\frac{3}{2}\left(4A_2 + \frac{B_2}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 + \frac{B_0}{2} = \frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24} = \frac{1}{6} \quad \text{(4)} \\ 2A_1 + \frac{B_1}{4} = 0 \quad \text{(5)} \\ 4A_2 + \frac{B_2}{8} = \frac{1}{12} \quad \text{(6)} \end{cases}$$

وبالتالي :

$$A_0 = \frac{1}{3} - B_0$$

$$\frac{1}{3} - B_0 + \frac{1}{2}B_0 = \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{2}B_0 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_0 = \frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{A_0 = 0} \quad , \quad \boxed{A_1 = B_1 = 0}$$

$$A_2 = \frac{2}{3} - B_2 \quad , \quad 4\left(\frac{2}{3} - B_2\right) + \frac{B_2}{8} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{8}{3} - 4B_2 + \frac{B_2}{8} = \frac{1}{12} \quad , \quad \frac{-31}{8}B_2 = \frac{1}{12} - \frac{8}{3} = \frac{1-32}{12} = -\frac{31}{12}$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{8}{12} \Rightarrow \boxed{B_2 = \frac{2}{3}} \Rightarrow A_2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{A_2 = 0}$$

تنشر العلاقة (2) بحالة $(n=0,2)$ نحصل على ⇐

$$n=0 \rightarrow u(r,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_2 r^2 + \frac{B_2}{r^3}\right) \cdot \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{3r} + \frac{1}{3r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

الترتيب مهم جداً بلعب تمرين واحد تعرض منه مرتين، حل.

وآخر فقرة :

* حل معادلة لابلاس في الاحداثيات الكروية (r, θ, φ) في الحالة العامة

$$u = u(r, \theta, \varphi) \quad \text{--- (1)}$$

والحل للمعادلة (1) داخل كرة نصف قطرها R

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta,\varphi)$$

وخارج كرة :

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\varphi)$$

علماً أنّ :

علاقة: $Y_0(\theta,\varphi) = a_0$

$Y_1(\theta,\varphi) = a_1\cos\theta + (b_1\cos\varphi + c_1\sin\varphi)\sin\theta$

$Y_2(\theta,\varphi) = a_2(3\cos^2\theta - 1) + (b_2\cos\varphi + c_2\sin\varphi)\sin\theta.\cos\theta +$

$+ (d_2\cos 2\varphi + e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta$

تطبيق:

اوجد حل معادلة لابلاس داخل كرة نصف قطرها $R=1$ في الاحداثيات الكروية والمحقق للشرط الحدي

$u(r,\theta,\varphi)\Big|_{r=1} = \cos(2\varphi + \frac{\pi}{3}).\sin^2\theta$ --- (1)

الحل:

$\cos(60) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ← (مثلث: 30، 60، 90، أضلاعه 2، 1، $\sqrt{3}$)

$\cos(2\varphi + \frac{\pi}{3})\sin^2\theta = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta,\varphi) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots$

$(\frac{1}{2}\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi).\sin^2\theta = a_0 + a_1\cos\theta + (b_1\cos\varphi + c_1\sin\varphi)\sin\theta$

$+ a_2(3\cos^2\theta - 1) + (b_2\cos\varphi + c_2\sin\varphi).\sin\theta.\cos\theta +$

$+ (d_2\cos 2\varphi + e_2\sin\varphi).\sin^2\theta + \cdots$

بالمطابقة نجد أنه:

$a_0 - a_2 = 0$

$a_1 = b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = 0 \;, a_2 = 0 \Big\} \Rightarrow a_0 = 0$ ؛ $\boxed{d_2 = \frac{1}{2} \;, e_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$u(r,\theta,\varphi) = r^2.Y_2 = r^2[\frac{1}{2}\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi].\sin^2\theta$

$u\Big|_{r=1} = [\cos 2\varphi.\cos\frac{\pi}{3} - \sin 2\varphi.\sin\frac{\pi}{3}]\sin^2\theta$

$= \cos(2\varphi + \frac{\pi}{3}).\sin^2\theta$

مثال دورة 2014 / 2015 السؤال الرابع 20 درجة

اوجد حل معادلة لابلاس في الاحداثيات الكروية العامة (r,θ,φ) خارج كرة نصف قطرها R والمحقق للشرط الحدي

$(u - u_r)\Big|_{r=1} = \sin\theta.\cos^2\frac{\theta}{2}.\sin(\varphi + \frac{\pi}{6})$ --- (1)

$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{R}{r})^{n+1} Y_n(\theta,\varphi)$

$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}}.Y_n(\theta,\varphi)$ --- (2)

نشتق العلاقة (2) بالنسبة لـ r

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(n+1)\, r^n}{r^{2n+2}}\, Y_n(\theta,\varphi)$$

$$u_r = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(n+1)}{r^{n+2}}\, Y_n(\theta,\varphi)$$

$$u - u_r\Big|_{r=1} = \sin\theta \cdot \cos^2\frac{\theta}{2} \cdot \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \equiv$$

$$\equiv Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [1 + (n+1)]\, Y_n(\theta,\varphi)$$

$$= Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)\, Y_n(\theta,\varphi)$$

يطابق

$$\frac{1}{2}\sin\theta\,(1+\cos\theta)\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi\right] \equiv$$

$$\equiv Y_0 + 3Y_1 + 4Y_2 + \cdots$$

$$\equiv a_0 + 3a_1\cos\theta + 3(b_1\cos\varphi + c_1\sin\varphi)\sin\theta + 4a_2(3\cos^2\theta - 1)$$

$$+ 4(b_2\cos\varphi + c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta + 4(d_2\cos 2\varphi + e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta + \cdots$$

الخطأ

بالمطابقة ،

$$a_0 - 4a_2 = 0 \quad , \quad a_1 = 0 \quad , \quad 3c_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad , \quad 3b_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi\right)\sin\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi\right)\sin\theta\cos\theta$$

بالمطابقة ≡

~~$a_0 - 4a_2 = 0$, $a_1 = 0$, $3c_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $3b_1 = \frac{1}{4}$~~

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$4b_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{16} \quad , \quad 4c_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow c_2 = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$(u - u_r)\Big|_{r=1} = \sin\theta \cdot \cos^2\frac{\theta}{2} \cdot \sin\left(\varphi + \frac{\sqrt{3}}{16}\right) \quad \cdots \quad (1)$$

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}Y_1 + \frac{1}{r^3}Y_2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{12}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{12}\sin\varphi\right)\cdot\sin\theta +$$

$$+ \frac{1}{r^3}\left(\frac{1}{16}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{16}\sin\varphi\right)\sin\theta\cos\theta$$

هو المطلوب... ♡

سؤال دورة : 22 علامة

ف3 2015/2014

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+y)\cdot u_y + u\right] = 2(x+y)$$

• أثبت أن المعادلة المعطاة من الصنف الزائدي

الحل: نشتق:

$$u_y + (x+y)u_{xy} + u_x = 2(x+y)$$

• أوجد الحل الخاص:

الحل: $u|_{x=y} = y^2,\quad u_y|_{x=y} = 1+y \Rightarrow v_x = 2(x+y)$

ما في صعوبة.. المادة سهلة كتير.. بس انتبه شو عم يطلب منك.

* تمرينات محلولة ص 198 (196) المصحح.. الفصل الثاني.. مثال -2-.

هو سؤال دورة..

$$u_{\xi\eta} + \frac{\xi}{(\xi^2+2\eta)}u_\eta = 0 \quad ; \quad \xi = x+y,\ \eta = y^2+x^2$$

أوجد الحل العام للمعادلة ثم أوجد الحل الخاص.

لو في شي بيقرأ السؤال صح...

نفرض أنه:

$$u_\eta = v$$
$$u_{\xi\eta} = v_\xi$$
$$v_\xi + \frac{\xi}{(\xi^2-2\eta)}\cdot v = 0$$

لذلك:

$$\frac{dv}{v} = \frac{-\xi}{\xi^2-2\eta}d\xi = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\xi d\xi}{\xi^2-2\xi} \Rightarrow$$

$$\ln\frac{v}{\psi(\eta)} = -\frac{1}{2}\ln(\xi^2-2\eta) \Rightarrow v = (\xi^2-2\eta)^{-\frac{1}{2}}\psi(\eta)$$

نثبت ξ ونكامل بالنسبة η

$$\Rightarrow u_\eta = (\xi^2-2\eta)^{-\frac{1}{2}}\psi(\eta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(\xi,\eta) = \int_0^{\eta}(\xi^2-2\zeta)^{-\frac{1}{2}}\psi(\zeta)\,d\zeta + \varphi(\xi)$$

وبالتالي الحل العام

$$u(x,y) = \int_0^{y^2+x^2}\left((x+y)^2-2\zeta\right)^{-\frac{1}{2}}\psi(\zeta)\,d\zeta + \varphi(x+y)$$

نحقق الشروط الابتدائية

$$u|_{y=0} = x^3,\quad u_y|_{y=0} = 0$$

$$\Rightarrow x^3 = \int_0^{x^2}(x^2-2\zeta)^{-\frac{1}{2}}\psi(\zeta)\,d(\zeta) + \varphi(x) \quad \text{---(1)}$$

$$u_y = [(x+y)^2 - 2(x^2+y^2)]^{-\frac{1}{2}} \psi(x^2+y^2)(2y) + \int_0^{y^2+x^2} -\frac{1}{2}[(x+y)^2 \ldots$$

$$\cdot (2(x+y) \cdot \psi(z)\, dz + \varphi'(x+y)$$

$$= -x \int_0^{x^2} [x^2 - 2z]^{-\frac{3}{2}} \psi(z)\, dz + \varphi'(x) \quad \text{--- (2)}$$

(3) --- $$3x^2 = (x^2 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}} \psi(x^2)(2x) + \int_0^{x^2} -\frac{1}{2}(x^2 - 2z)^{-\frac{3}{2}} \psi(z) \cdot (2x)\, dz + \varphi'(x)$$

$$3x^2 = (-x)^{-1} \cdot \psi(x^2)(2x)$$ بالطرح ⇐ 2

$$\psi(x^2) = -\frac{3}{2} x^2$$ ثم نبدل في (1)

انتهت المحاضرة العاشرة ١٠ م -

والأخيرة -- -

الدكتور / رحيم نعمة علي --